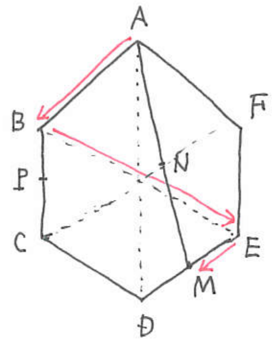
2015年 工（A）第2問

$\boxed{2}$ 正六角形 ABCDEF において，DE の中点を M，AM の中点を N，BC の中点を P とする．

(1) $\overrightarrow{AM}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AF}$ で表すと

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\boxed{チ}\ 3}{\boxed{ツ}\ 2}\overrightarrow{AB} + \overset{2}{\boxed{テ}}\,\overrightarrow{AF}$$



となる．また，$\overrightarrow{NP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AF}$ で表すと

$$\overrightarrow{NP} = \frac{\boxed{ト}\ 3}{\boxed{ナ}\ 4}\overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{ニヌ}\ -1}{\boxed{ネ}\ 2}\overrightarrow{AF}$$

となる．

(2) 内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 1$ のとき

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = \frac{\boxed{ノハ}\ -1}{\boxed{ヒ}\ 6}$$

となる．

(1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BE}}_{=2\overrightarrow{AF}} + \underbrace{\overrightarrow{EM}}_{=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}$ //

$\therefore\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$

また，$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

$\therefore\ \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{NP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}}$ //

(2) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} &= (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF})\cdot(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF})\\ &= 4|\overrightarrow{AB}|^2 + 6\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} + 2|\overrightarrow{AF}|^2\\ &= 6l^2 + 6l^2\cdot\cos 120^\circ \quad \text{（正六角形の1辺の長さを}l\text{とした）}\\ &= 3l^2\end{aligned}$$

$\therefore\ 3l^2 = 1$ より，$l = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\cos 120^\circ = \underline{-\frac{1}{6}}$ //