0001823456718999

宮崎大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．ただし，e は自然対数の底を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

(i) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ (ii) $y=(x+2)\sqrt{x^2+2x+5}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\sin(5x)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+3x^2}{x^2+3x+2}\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_1^2 x^5e^{x^3}\,dx$

和・積の公式作り方！

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$-)\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$

$\therefore\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$

$\alpha=3x,\ \beta=5x$ を代入して．

$\sin3x\sin5x=\frac{1}{2}(\cos2x-\cos8x)$

$$=\frac{x(x^2+3x+2)-2x}{x^2+3x+2}=x-\frac{2x}{x^2+3x+2}=x-\frac{2x+3}{x^2+3x+2}+\frac{3}{x^2+3x+2}$$

部分分数に分解！

(1)(i) $$y'=\frac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\underline{\frac{1}{1-\sin x}}\,/\!/$$

(ii) $$y'=\sqrt{x^2+2x+5}+(x+2)\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{x^2+2x+5+x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\underline{\frac{2x^2+5x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}}\,/\!/$$

(2)(i) $$\int_1^2\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\Big[\log|e^x-e^{-x}|\Big]_1^2=\log(e^2-\tfrac{1}{e^2})-\log(e-\tfrac{1}{e})=\underline{\log(e+\tfrac{1}{e})}\,/\!/$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin(3x)\sin(5x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos2x-\cos8x\,dx=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{8}\sin8x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\Big)=\underline{\frac{5}{32}\sqrt3}\,/\!/$$

(iii) $$(与式)=\int_0^1 x-\frac{(x^2+3x+2)'}{x^2+3x+2}+3\Big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\Big)dx$$
$$=\Big[\frac{x^2}{2}-\log|x^2+3x+2|+3\log|x+1|-3\log|x+2|\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-\log6+3\log2-3\log3+\log2+3\log2$$
$$=\underline{\frac{1}{2}+6\log2-4\log3}\,/\!/$$

(iv) $t=x^3$ とおくと、$dt=3x^2dt$

x	$1\to2$
t	$1\to8$

$$(与式)=\int_1^8\frac{t}{3}\cdot e^t\,dt=\int_1^8\frac{t}{3}(e^t)'dt=\Big[\frac{t}{3}\cdot e^t\Big]_1^8-\int_1^8\frac{1}{3}e^t\,dt=\underline{\frac{7}{3}e^8}\,/\!/$$