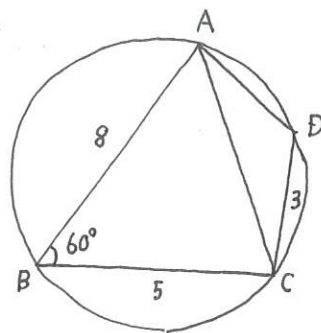


2016年1期1日目第4問

4 円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 8$ 、 $BC = 5$ 、 $CD = 3$ 、 $\angle ABC = 60^\circ$ である。このとき、次の各問の空欄に当てはまる最も適切な数値を記入せよ。

- (1) 対角線 AC の長さは $\frac{7}{31}$ である。
 (2) 辺 AD の長さは $\frac{5}{32}$ である。
 (3) 円の半径は $\frac{33}{35} \sqrt{\frac{34}{3}}$ である。
 (4) 四角形 ABCD の面積は $\frac{36}{38} \sqrt{\frac{55}{37}}$ である。



(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 64 + 25 - 40 \\ &= 49 \end{aligned}$$

$$\therefore AC > 0 \text{ より, } \underline{AC = 7}$$

(2) 四角形 ABCD は円に内接しているので

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ADC = 120^\circ$$

余弦定理より、

$$AC^2 = AD^2 + 3^2 - 2 \cdot AD \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$$

$$\therefore 49 = AD^2 + 9 + 3AD$$

$$AD^2 + 3AD - 40 = 0$$

$$(AD + 8)(AD - 5) = 0$$

$$AD > 0 \text{ より, } \underline{AD = 5}$$

(3) 正弦定理より

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \therefore \underline{R = \frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

(4)

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (40 + 15) \\ &= \underline{\frac{55\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$