東京海洋大学

2016年 海洋工 第2問

解答作成者 K.M.

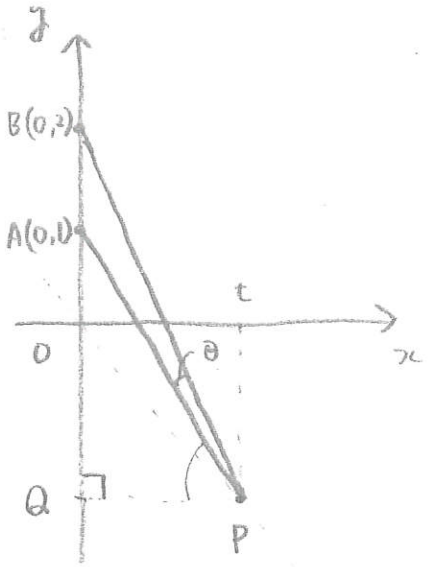
CHECK 数理 石井K

2 座標平面上に4点 A(0, 1), B(0, 2), P(t, $-t$), Q(0, $-t$)（ただし，$t>0$）をとる．$\angle APB=\theta$ とおく．

(1) $\tan\angle APQ$ を t を用いて表せ．

(2) $\tan\theta$ を t を用いて表せ．

(3) $\dfrac{1}{\tan\theta}$ を考えることにより，$\tan\theta$ の最大値とそのときの t の値を求めよ．



(1) △APQで

$$\tan\angle APQ=\frac{AQ}{PQ}=\frac{1+t}{t}$$ //

(2) △BPQで

$$\tan\angle BPQ=\frac{BQ}{PQ}=\frac{2+t}{t}$$

よって

$$\tan\theta=\tan(\angle BPQ-\angle APQ)$$
$$=\frac{\frac{2+t}{t}-\frac{1+t}{t}}{1+\frac{2+t}{t}\cdot\frac{1+t}{t}}$$
$$=\frac{t}{2t^2+3t+2}$$ //

(3) $t>0$ より

$$\frac{1}{\tan\theta}=2t+\frac{2}{t}+3$$

$2t>0$, $\frac{2}{t}>0$ だから 相加・相乗平均の大小関係により

$$2t+\frac{2}{t}+3\geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{2}{t}}+3=7$$

等号は $2t=\frac{2}{t}$ かつ $t>0$ すなわち $t=1$ のとき成立するから

$$\frac{1}{\tan\theta}\geqq 7 \quad よって \quad \tan\theta\leqq\frac{1}{7}$$

したがって 求める最大値は $\frac{1}{7}$ $(t=1)$ //