神戸大学

2014年 第1問

$\boxed{1}$ 2次方程式 $x^2-x-1=0$ の2つの解を α，β とし，

$$c_n=\alpha^n+\beta^n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) n を2以上の自然数とするとき，

$$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$$

となることを示せ．

(2) 曲線 $y=c_1x^3-c_3x^2-c_2x+c_4$ の極値を求めよ．

(3) 曲線 $y=c_1x^2-c_3x+c_2$ と，x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) α, β は $x^2-x-1=0$ の解なので

$\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$

$C_{n+1}-C_n-C_{n-1}=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}-\alpha^n-\beta^n-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}$

$=\alpha^{n-1}(\alpha^2-\alpha-1)+\beta^{n-1}(\beta^2-\beta-1)$

$=0$

$\therefore\ C_{n+1}=C_n+C_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ▨

(2) 解と係数の関係より．$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore\ C_1=1$, $C_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3$, $C_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore\ C_3=4$, $C_4=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=7$

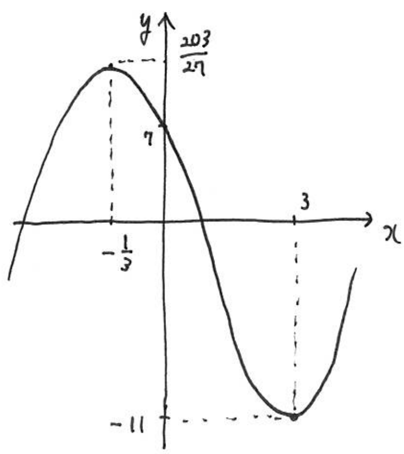
$\therefore\ y=x^3-4x^2-3x+7$

$\therefore\ y'=3x^2-8x-3$

$=(x-3)(3x+1)$

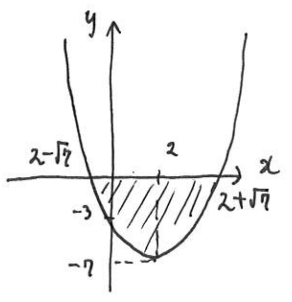
x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{203}{27}$	↘	-11	↗
		極大		極小	

$\begin{cases} 極大値\ \dfrac{203}{27}\ (x=-\frac{1}{3}) \\ 極小値\ -11\ (x=3) \end{cases}$ //



(3) $y=x^2-4x+3$

$=(x-3)(x-1)$



$=\displaystyle\int_1^3 -x^2+4x-3\,dx$

$=-\displaystyle\int_1^3 (x-3)(x-1)\,dx$

$=\dfrac{1}{6}(3-1)^3\quad=\dfrac{4}{3}$ //