弘前大学

2016年 文系 第1問

$\boxed{1}$ kを実数とする．放物線$C : y = -2x^2$と直線$\ell : y = kx - 2$の交点をP，Qとする．

(1) 点Pのx座標をα，点Qのx座標をβとしたとき，$\alpha + \beta$と$\alpha\beta$の値をkを用いて表せ．

(2) 点P，QにおけるCの接線をそれぞれ引き，その交点をRとする．kがすべての実数を動くとき，点Rの軌跡を求めよ．

(1) $kx - 2 - (-2x^2) = 0$

$\therefore 2x^2 + kx - 2 = 0$　判別式$D = k^2 + 16 > 0$より，kの値によらず異なる2点で交わる．

この方程式の解がα, βなので解と係数の関係により，

$\underline{\alpha + \beta = -\frac{k}{2},\ \alpha\beta = -1}$ //

(2) $P(\alpha, -2\alpha^2)$，$Q(\beta, -2\beta^2)$，$y' = -4x$より，

Pにおける接線は．$y = -4\alpha(x - \alpha) - 2\alpha^2$　$\therefore y = -4\alpha x + 2\alpha^2 \cdots ①$

Qにおける接線は．$y = -4\beta x + 2\beta^2 \cdots ②$

① − ② より，$-4(\alpha - \beta)x + 2(\alpha^2 - \beta^2) = 0$

$$\therefore -4(\alpha - \beta)\left\{x - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right\} = 0$$

$\alpha \neq \beta$より．$x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$　このとき①より，$y = -2\alpha\beta$

$\therefore R(X, Y)$とおくと，$R\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, -2\alpha\beta\right)$

$$\therefore \begin{cases} X = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ Y = -2\alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} X = -\frac{1}{4}k \\ Y = 2 \end{cases} \quad (\because (1)より)$$

kはすべての実数を動くとき，

点Rの軌跡は．$\underline{直線\ y = 2}$ //