



2015年理系第9問

9 関数 $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x) dx$ を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= \frac{1+x^2 - (1+x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{x^2+2x-1}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$\therefore f'(x) = 0$ とするのば、 $x = -1 \pm \sqrt{2}$

また、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ より増減表は

x	$(-\infty)$	\dots	$-1-\sqrt{2}$	\dots	$-1+\sqrt{2}$	\dots	$(+\infty)$
$f'(x)$			-	0	+	0	-
$f(x)$	(0)	\searrow		\nearrow		\searrow	(0)

右のようになる

$$\therefore \text{最大値は } f(-1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{最小値は } f(-1-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \left(\frac{2}{3}\right) = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx \quad \leftarrow \text{奇関数なので0としてもよい}$$

$$x = \tan \theta \text{ とおいて置換積分 } \begin{array}{l} x \parallel -\sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3} \\ \theta \parallel -\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}, dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta + \frac{1}{2} \left[\log(1+x^2) \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \pi$$