

2014年第1問


 数理
石井K

1 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上に2点 $N(0, 1)$, $S(0, -1)$ をとる. また x 軸上に点 $P(a, 0)$ ($a > 1$) をとり, 直線 NP と円 C との交点で, 点 N とは異なる点を Q とする. さらに, 直線 SQ と x 軸との交点を R とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 直線 NP の方程式を求め, 点 Q の座標を a を用いて表せ.

(2) 直線 SQ の方程式を求め, 点 R の座標を a を用いて表せ.

(3) 線分 PR の長さが2になるときの a の値を求めよ.

$$(1) NP: y = \frac{-1}{a}(x-a) \quad \therefore y = -\frac{1}{a}x + 1 //$$

$$\text{これを } x^2 + y^2 = 1 \text{ に代入して, } x^2 + \left(-\frac{1}{a}x + 1\right)^2 = 1$$

$$\therefore x \left(\frac{a^2+1}{a^2}x - \frac{2}{a} \right) = 0 \quad N \neq Q \text{ より, } x = \frac{2a}{a^2+1} \quad \therefore Q \left(\frac{2a}{a^2+1}, \frac{a^2-1}{a^2+1} \right) //$$

$$(2) SQ: y = \frac{\frac{a^2-1}{a^2+1} - (-1)}{\frac{2a}{a^2+1} - 0} x - 1 \quad \therefore y = \frac{2a^2}{2a}x - 1 \quad \therefore y = ax - 1 //$$

$$y=0 \text{ を代入すると, } x = \frac{1}{a} \quad \therefore R \left(\frac{1}{a}, 0 \right) //$$

$$(3) PR = a - \frac{1}{a} \text{ より } a - \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$a > 1 \text{ なのので, } a = 1 + \sqrt{2} //$$