2014年 海洋工 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $a \neq 1$ に対して $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$ とする．

(1) $E - A$ の逆行列 B を求めよ．ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$E + A + A^2 + \cdots + A^n = B(E - A^{n+1})$$

となることを示せ．

(3) $A^n = \begin{pmatrix} -(n-1)a^n & na^{n-1} \\ -na^{n+1} & (n+1)a^n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を数学的帰納法を用いて示せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$ を求めよ．

(1) $E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a^2 & 1-2a \end{pmatrix}$ $\therefore \det(E-A) = 1 - 2a + a^2 = (a-1)^2 > 0$ $(\because a \neq 1)$

$\therefore$ $\underline{B = \dfrac{1}{(a-1)^2}\begin{pmatrix} 1-2a & 1 \\ -a^2 & 1 \end{pmatrix}}$ //

(2) (右辺) $= B(E-A)(E + A + A^2 + \cdots + A^n) = E + A + A^2 + \cdots + A^n =$ (左辺) ■

(3) 数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき．$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$ となり 成り立つ

(ii) $n = k$ のとき 成り立つと仮定すると，$A^k = \begin{pmatrix} -(k-1)a^k & ka^{k-1} \\ -ka^{k+1} & (k+1)a^k \end{pmatrix}$

このとき．$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(k-1)a^k & ka^{k-1} \\ -ka^{k+1} & (k+1)a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ka^{k+1} & (k+1)a^k \\ (k-1)a^{k+2} - 2ka^{k+2} & -ka^{k+1} + 2(k+1)a^{k+1} \end{pmatrix}$

$\therefore$ $A^{k+1} = \begin{pmatrix} -ka^{k+1} & (k+1)a^k \\ -(k+1)a^{k+2} & (k+2)a^{k+1} \end{pmatrix}$ となり $n = k+1$ のときも成り立つ

(i)(ii)より．自然数 n に対して 与式が成り立つ ■

(4) (2)の与式の(左辺)の 1,2 成分が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$ となることから．(右辺)の 1,2 成分を計算すると，

$B(E - A^{n+1}) = \dfrac{1}{(a-1)^2}\begin{pmatrix} 1-2a & 1 \\ -a^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+na^{n+1} & -(n+1)a^n \\ (n+1)a^{n+2} & 1-(n+2)a^{n+1} \end{pmatrix}$ であることから．1,2 成分は．

$\dfrac{1}{(a-1)^2}\left\{-(1-2a)(n+1)a^n + 1 - (n+2)a^{n+1}\right\} = \underline{\dfrac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2}}$ //