

2015年 現代教養 第5問

5 x についての方程式

$$\log_2 x = \log_4(8x - a - 6)$$

が異なる2つの実数解を持つとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

真数条件より、 $x > 0$ かつ $8x - a - 6 > 0$

$$\therefore x > 0 \text{ かつ } x > \frac{a+6}{8} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 x = \frac{\log_2(8x - a - 6)}{\log_2 4} \quad (\because \text{底の変換公式より})$$

$$\therefore 2 \log_2 x = \log_2(8x - a - 6)$$

$$\therefore \log_2 x^2 = \log_2(8x - a - 6)$$

$$\therefore x^2 = 8x - a - 6$$

$$x^2 - 8x + a + 6 = 0$$

判別式を D とおくと、 $D > 0$ が必要条件であるから

$$\begin{aligned} D/4 &= (-4)^2 - (a+6) \\ &= -a + 10 \end{aligned}$$

$$\therefore -a + 10 > 0 \text{ より、 } a < 10$$

また、 x 軸との交点は $(0, a+6)$

$$\therefore a+6 > 0 \text{ より、 } a > -6$$

$$\text{以上から、 } -6 < a < 10 \text{ このとき } \textcircled{1} \Leftrightarrow x > \frac{a+6}{8} \quad (<2)$$

$$f(x) = x^2 - 8x + a + 6 \text{ とおくと、 } f\left(\frac{a+6}{8}\right) = \left(\frac{a+6}{8}\right)^2 > 0$$

$$\therefore \text{これは条件をみたす。 } \therefore \underline{\underline{-6 < a < 10}} //$$