2014年 医学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面上の2つの曲線

$$C_1 : y = ax^2 + 1, \quad C_2 : x = ay^2 + 1 \quad (a\text{は正の定数})$$

を考える.

(1) 2つの曲線 C_1, C_2 が2点で交わるような正の定数 a の値の範囲は

$$0 < a < \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \quad \frac{1}{4}$$

である.

(2) $a = \frac{3}{16}$ のとき, 曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形の面積を S とすれば

$$S = \frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}} \quad \frac{32}{27}$$

である.

(1) C_1 と C_2 の交点を (p, q) とおくと,

$q = ap^2 + 1 \cdots ①$

$p = aq^2 + 1 \cdots ②$

②−①より, $p - q = a(q^2 - p^2)$

$\therefore (p-q)(1 + ap + aq) = 0$

$a > 0$ より, $p > 0$, $q > 0$ $\quad \therefore 1 + ap + aq \neq 0$

$\therefore p = q$

①より, $ap^2 - p + 1 = 0 \cdots ③$

判別式を D とおくと $D > 0$

$D = (-1)^2 - 4a \cdot 1$

$\therefore 1 - 4a > 0 \qquad \therefore \underline{0 < a < \frac{1}{4}}$ //

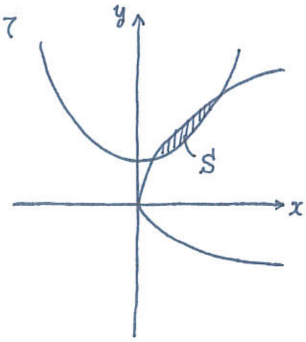
(2) (1)の③に $a = \frac{3}{16}$ を代入して

$\frac{3}{16}p^2 - p + 1 = 0$

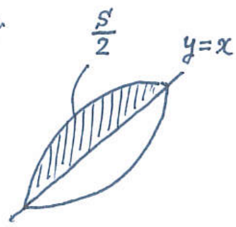
$\therefore p = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{3}{16} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{3}{16}}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{4-3}}{\frac{3}{4}}$

$= 4, \frac{4}{3}$



領域は $y = x$ に関して対称なので



$S = 2\int_{\frac{4}{3}}^{4} \sqrt{\frac{x-1}{a}} - x \, dx$

$= 2\int_{\frac{4}{3}}^{4} \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} - x \, dx$

$= 2\left[\frac{2}{3\sqrt{a}}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{4}{3}}^{4}$

$= 2\left(\frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{3} - 8 - \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{9} \right)$

$= 2\left(\frac{8}{9} - \frac{8}{27} \right)$

$= \underline{\frac{32}{27}}$ //