



2015年工学部第5問



5 関数 $f(x) = \log(1+x)$ について、次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数である。

(1) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。

(2) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right\}$$

(3) 関数 $g(x) = xf(x-1) - x$ とするとき、 $g(x)$ の最小値を求めよ。

$$(1) \int f(x) dx = \int (x+1)' \log(1+x) dx$$

$$= (1+x) \log(1+x) - \int dx$$

$$= (1+x) \log(1+x) - x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(2) \text{ (与式)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1$$

$$= \underline{2 \log 2 - 1} \quad "$$

$$(3) g(x) = x \log x - x$$

$$\therefore g'(x) = \log x + 1 - 1$$

$$= \log x$$

$$\therefore g'(x) = 0 \text{ となるのは } x = 1$$

\therefore 右の増減表より、最小値は $g(1) = -1$ "

x	(0)	...	1	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		↘	-1	↗