

2012年医学部第4問

4 曲線 $C: y = \log x$ 上に異なる2点 $A(a, \log a)$, $B(b, \log b)$ をとり, C の A における接線と B における接線の交点について考える. 次の問いに答えよ.

- (1) 任意に与えられた $a > 1$ に対して, 2本の接線の交点がちょうど直線 $x = 1$ 上にくるような b が唯一だけ存在し, $b < 1$ であることを示せ.
- (2) 2点 $A(a, \log a)$, $B\left(\frac{1}{a}, \log \frac{1}{a}\right)$ ($a > 1$) について, 2本の接線の交点の x 座標が1より大きいか小さいかを調べよ.
- (3) k を自然数とする. $a = 1 + \frac{1}{k}$ として(2)の結果を使って, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log n \quad (n \geq 2)$$