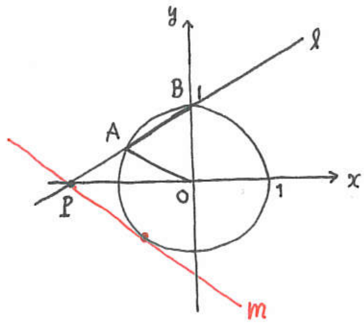
2015年 理系1第2問

$\boxed{2}$ kを正の実数とする．直線$\ell : y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + k$は$x$軸と点Pで交わり，円$O : x^2 + y^2 = 1$と2点A，Bで交わる．ただし，3点P，A，Bは直線ℓ上にこの順で並び，AB＝1である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) kの値を求めよ．また，点P，A，Bの座標を求めよ．

(2) 点Pを通り円Oに接する直線のうち傾きが負であるものをmとする．直線mの方程式を求めよ．また，直線mと円Oの接点Cの座標を求めよ．

(3) Cを(2)で求めた点とする．三角形ABCの面積を求めよ．



(1) $OA = OB = AB = 1$ であるから．$\triangle OAB$は正三角形である．

直線ℓはx軸の正の向きと30°の角度をなす（$\because \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より）

$\therefore \angle BPO = 30^\circ$，$\angle PBO = 60^\circ$となり．$\angle POB = 90^\circ$

$\therefore$ $\underline{B(0, 1)}$〃　直線ℓがBを通ることより．$\underline{k = 1}$〃

$A(\cos 150^\circ, \sin 150^\circ)$より．$\underline{A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}$〃　$\ell : y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1$ より $\underline{P(-\sqrt{3}, 0)}$〃

(2) 接点をC(a, b)とおくと，Cが円O上にあることから．

$a^2 + b^2 = 1$ ⋯①

このとき．接線は．$m : ax + by = 1$ となり．これがPを通ることから．

$-\sqrt{3}a = 1$ ⋯②

①，②より．$a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$，$b = -\frac{\sqrt{6}}{3}$（mの傾きが負なので $b < 0$ となる）

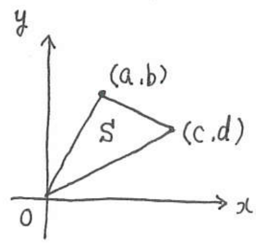
$\therefore$ $\underline{C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}$〃　であり．$\underline{m : \sqrt{3}x + \sqrt{6}y + 3 = 0}$〃

(3) 点A，B，Cをy軸方向に-1平行移動させた点をそれぞれ，A′，B′，C′とすると．

$A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，$B'(0, 0)$，$C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}+3}{3}\right)$

$\therefore S = \frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{6}\right|$

$= \underline{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}}$〃



$\boxed{S = \frac{1}{2}|ad - bc|}$