東京学芸大学

2014年 第1問

数理 石井K

1 自然数 n に対し，整式 $(x^2+x+1)^n$ を整式 x^3+x^2-x-1 で割ったときの余りを $a_nx^2+b_nx+c_n$ とする．このとき，a_n，b_n，c_n を求めよ．

$$x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1)$$
$$= (x+1)^2(x-1)$$

割ったときの商

$$\therefore (x^2+x+1)^n = (x+1)^2(x-1)\cdot P(x) + \underbrace{a_nx^2+b_nx+c_n}_{\text{余り}} \quad \cdots (*)$$

(*)に $x=1$ を代入すると．$3^n = a_n+b_n+c_n \cdots ①$

$x=-1$ を代入すると．$1 = a_n-b_n+c_n \cdots ②$

また、(*) を x で微分すると．

$$n\cdot(x^2+x+1)^{n-1}\cdot(2x+1) = (3x-1)(x+1)P(x) + (x+1)^2(x-1)P'(x) + 2a_nx+b_n \quad \cdots (*')$$

(*')に $x=-1$ を代入して，$-n = -2a_n+b_n \cdots ③$

①～③より，$a_n = \dfrac{3^n+2n-1}{4}$，$b_n = \dfrac{3^n-1}{2}$，$c_n = \dfrac{3^n-2n+3}{4}$ //