2016年 人間科学学部（文系） 第2問

$\boxed{2}$ 三角形ABCに対して，ベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ を

$$\vec{p} = (\sin A,\ \sin B), \quad \vec{q} = (\cos B,\ \cos A)$$

とするとき

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \sin 2C$$

が成り立つ．以下の問に答えよ．

(1) 角 C の大きさは $\dfrac{\boxed{\text{エ}}\ 1}{\boxed{\text{オ}}\ 3}\pi$ である．

(2) $\sin A$，$\sin C$，$\sin B$ はこの順で等差数列をなし，かつ，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 32$$

であるとき，辺ABの長さは $\overset{8}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

(1) $\vec{p} \cdot \vec{q} = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

$= \sin(A+B)$

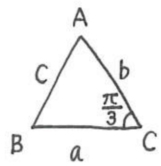
$= \sin(\pi - C)$ （$\because A+B+C=\pi$ より）

$= \sin C$

$\therefore \sin C = \sin 2C$

$\therefore \sin C(1 - 2\cos C) = 0$

$0 < C < \pi$ より，$\sin C > 0$ $\therefore \cos C = \frac{1}{2}$ よって，$\underline{C = \frac{1}{3}\pi}$ //



(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$= |\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}| \cos \frac{\pi}{3}$

$\therefore ab = 64 \cdots ①$

正弦定理より，Rは外接円の半径

$\sin A + \sin B = 2\sin C$（等差中項）より，$\dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R} = \dfrac{2c}{2R}$ $\therefore a+b = 2c \cdots ②$

余弦定理より，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{3}$

$= (a+b)^2 - 2ab - ab$

$= (2c)^2 - 3 \cdot 64$ （$\because$ ①，②より）

$\therefore 3c^2 = 3 \cdot 64$ $\therefore c = 8$ $\therefore \underline{\mathrm{AB} = 8}$ //