

2014年工学部第3問

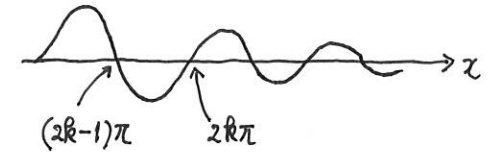
3 a, b は定数とする. 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$, $g(x) = e^{-x}(a \cos x + b \sin x)$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) すべての x に対して $\frac{d}{dx}g(x) = f(x)$ となるように a, b の値を定めよ.
 (2) $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ ($k=1, 2, 3, \dots$) の範囲で, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S_k を k の式で表せ.
 (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k$ を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \frac{d}{dx}g(x) &= -e^{-x}(a \cos x + b \sin x) + e^{-x}(-a \sin x + b \cos x) \\ &= e^{-x}\{(b-a) \cos x - (a+b) \sin x\} \end{aligned}$$

$$\therefore a = b, \quad a + b = -1 \quad \text{より,} \quad \underline{a = b = -\frac{1}{2}}$$

(2) $f(x) = 0$ と x の交点は $x = k\pi$ のとき.

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} -e^{-x} \cdot \sin x \, dx \\ &= \left[+e^{-x} \sin x \right]_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} - \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} e^{-x} \cos x \, dx \\ &= - \left[-e^{-x} \cos x \right]_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} e^{-x} \sin x \, dx \\ &= e^{-2k\pi} + e^{-(2k-1)\pi} - S_k \quad \therefore S_k = \frac{e^{-2k\pi} \cdot (1 + e^\pi)}{2} \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} \right\} \cdot \frac{1 + e^\pi}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-2\pi} (1 - (\frac{1}{e^{2\pi}})^n)}{1 - \frac{1}{e^{2\pi}}} \cdot \frac{1 + e^\pi}{2} \\ &= \frac{1}{e^{2\pi} - 1} \cdot \frac{1 + e^\pi}{2} \\ &= \frac{1 + e^\pi}{2(e^\pi + 1)(e^\pi - 1)} = \frac{1}{2(e^\pi - 1)} \end{aligned}$$