0001835454618999

富山大学

2014年 第3問　1枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}|x\log|x|| & (x \neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$$g(x)=-x^2+1$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\log x > -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示し，これを用いて $f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．

(2) $f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 方程式 $f(x)=g(x)$ の解は $x=-1,\ 1$ のみであることを示せ．

(4) $0<r<1$ とする．曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形のうち，$x \geqq r$ の範囲の部分の面積を $S(r)$ とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{r \to +0} S(r)$ を求めよ．

(1) $g(x)=\log x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とおくと．

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘		↗

$\therefore g'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 右の増減表より．$g(x) \geqq g(\frac{1}{4})=2(1-\log 2)>0$ ■

(1) のつづき．これより．$x>0$ のとき．$x\log x > -\sqrt{x}$ …①，$-x\log x < \sqrt{x}$ …②

● $0<x<1$ のとき．

$$|x\log|x||=|x\log x|=-x\log x$$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0} -x\log x$　$\therefore\ 0 \leqq \displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) \overset{②}{\leqq} \underbrace{\lim_{x\to+0}\sqrt{x}}_{\to 0}$

はさみうちの原理より．$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=0$

● $-1<x<0$ のとき．

$$|x\log|x||=|x\log(-x)|=x\log(-x)$$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0} x\log(-x)$　$\therefore\ 0 \leqq \displaystyle\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to+0} -x\log x \overset{②}{\leqq} \underbrace{\lim_{x\to+0}\sqrt{x}}_{\to 0}$

$t=-x$ とおいて考える

はさみうちの原理より．$\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)=0$

• $x=0$ のとき．定義より $f(0)=0$

以上より．$f(x)$ は $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to-0} f(x)=f(0)$ となり．$x=0$ で連続 ■

0001835454618999

富山大学

2014年 第3問　　2枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} |x \log |x|| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$g(x) = -x^2 + 1$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x > -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示し，これを用いて $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ．

(2) $f(x)$ の極値を求め，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 方程式 $f(x) = g(x)$ の解は $x = -1,\ 1$ のみであることを示せ．

(4) $0 < r < 1$ とする．曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ によって囲まれた図形のうち，$x \geqq r$ の範囲の部分の面積を $S(r)$ とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{r \to +0} S(r)$ を求めよ．

(2) $f(-x) = |-x \log|-x||$

$= |-x \log|x||$

$= |x \log|x||$

$= f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ は y 軸に関して対称

(2)のつづき．よって $x \geqq 0$ のときを考える．

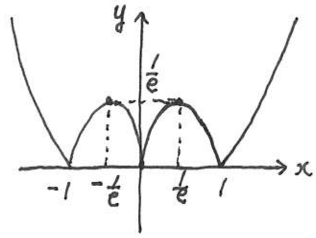
(i) $0 < x < 1$ のとき．(1)より $f(x) = -x\log x$　　$\therefore f'(x) = -\log x - 1$

(ii) $x > 1$ のとき．　　$f(x) = x\log x$　　$\therefore f'(x) = \log x + 1 > 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to+0} -\log x - 1 = +\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	/	$+$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗

よって右のグラフになる．



(3)．(i) $0 < x < 1$ のとき．

$f(x) - g(x) = -x\log x + x^2 - 1$

$\therefore$ $f(x) - g(x) = h(x)$ とおくと．$h'(x) = -\log x - 1 + 2x$

$h''(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$　　$\therefore h''(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{1}{2}$ のとき．

$\therefore$ 右の増減表より．$h'(x) \geqq h'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \log 2 > 0$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		↘		↗	

$\log 2$

$\therefore$ $h(x)$ は単調増加

$\displaystyle\lim_{x\to+0} h(x) = -1$，$h(1) = 0$　より．$0 < x < 1$ では

$f(x) = g(x)$ の解はない．

(ii) $x \geqq 1$ のとき．$h(x) = x\log x + x^2 - 1$，$h'(x) = \log x + 2x > 0$

x	1	$\cdots$
$h'(x)$		$+$
$h(x)$	1	↗

~~(i)と同様に考えると．$h''(x) > 0$ より．$h'(x) \geqq 1$~~　$\therefore$ $h(x)$：単調増加．

$h(1) = 0$ より．$g(x) = f(x)$ となるのは $x = 1$

$g(x)$ は y 軸に関して対称なので，$h(x)$ も対称　また $h(0) = -1 \neq 0$ より．$x = \pm 1$ ■

2014年 第3問　3枚目/3枚

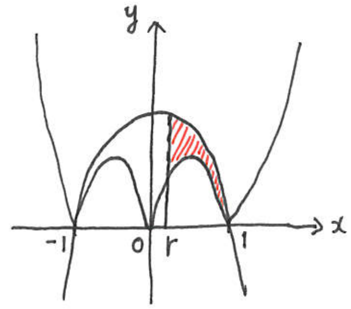
数理 石井K

3 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}|x\log|x|| & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$$g(x)=-x^2+1$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．



(1) $x>0$ のとき，不等式 $\log x>-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示し，これを用いて $f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．

(2) $f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 方程式 $f(x)=g(x)$ の解は $x=-1,\ 1$ のみであることを示せ．

(4) $0<r<1$ とする．曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形のうち，$x\geqq r$ の範囲の部分の面積を $S(r)$ とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{r\to+0}S(r)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle S(r)=\int_r^1 -x^2+1-f(x)\,dx$

$\displaystyle =\int_r^1 -x^2+1+x\log x\,dx$

$\displaystyle =\int_r^1 -x^2+1\,dx+\int_r^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$

$\displaystyle =\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_r^1+\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_r^1-\int_r^1\frac{x}{2}\,dx$

$\displaystyle =\frac{2}{3}+\frac{r^3}{3}-r+\left(-\frac{r^2}{2}\log r\right)-\left[\frac{x^2}{4}\right]_r^1$

$\displaystyle =\frac{5}{12}+\underbrace{\frac{r^3}{3}}_{\to 0}\underbrace{-r}_{\to 0}-\frac{r^2}{2}\log r+\underbrace{\frac{r^2}{4}}_{\to 0}$

$r\to+0$ のとき．(1)より．$\log r>-\dfrac{1}{\sqrt{r}}$　$0>\dfrac{r^2}{2}\log r>-\dfrac{r\sqrt{r}}{2}$

$\displaystyle\lim_{r\to+0}-\frac{r\sqrt{r}}{2}=0$ より．はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{r\to+0}\frac{r^2}{2}\log r=0$

$\displaystyle\therefore \lim_{r\to+0}S(r)=\frac{5}{12}$