



2015年第1問

1 曲線 $C_1: y = \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) と曲線 $C_2: y = 2 \sin x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) を考える. 曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ.

C_1 と C_2 の交点の x 座標で 0 でないものを α とおくと.

$$\tan \alpha = 2 \sin \alpha \quad \text{より}$$

$$2 \sin \alpha (\cos \alpha - \frac{1}{2}) = 0$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

\therefore 求める体積を V とおくと.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin x)^2 - \tan^2 x \, dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \sin^2 x - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \, dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 - 2 \cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \pi \left[3x - \sin 2x - \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \pi \left(\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \right) \\ &= \underline{\underline{\pi^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi}} \quad \text{〃} \end{aligned}$$

