

2015年 第2問

2 次の問いに答えよ。

(1) r を $|r| < 1$ である実数とする。自然数 n に対して

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

とおく。

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を r の式で表せ。ただし $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい。(2) n を自然数とする。2人の弓道部員 A, B が矢を的に命中させる確率は, A が $\frac{4}{5}$, B が $\frac{1}{2}$ である。A, B が的に向かってそれぞれ n 回ずつ矢を射る。(i) $n = 1$ のとき, A の射る矢が命中する確率を p_1 とし, A の射る矢が命中せずに B の射る矢が命中する確率を q_1 とする。 $p_1 + q_1$ を求めよ。(ii) $n \geq 2$ のとき, 1回目から $(n-1)$ 回目まで A の射る矢も B の射る矢も命中せず, n 回目に A の射る矢が命中する確率を p_n とする。 p_n を求めよ。(iii) $n \geq 2$ のとき, A の射る矢は1回目から n 回目まで命中せず, B の射る矢は1回目から $(n-1)$ 回目まで命中せずに n 回目のみ命中する確率を q_n とする。 q_n を求めよ。(3) (2) で求めた p_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)p_n$$

とおく。 E の値を求めよ。