東京大学

2015年 文系 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを1枚用意し，次のように左から順に文字を書く．

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く．さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

たとえば，コインを5回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，

AABBAAB

となる．このとき，左から4番目の文字は B，5番目の文字は A である．

(1) n を正の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2) n を2以上の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

(1). 文字列 AA の代わりに AA′ と表すことにする．

左から n 番目の文字が A である確率を p_n，A′ である確率を q_n，

B である確率を r_n とおく

$$\begin{cases} p_{n+1} = (q_n + r_n)\cdot\frac{1}{2} \\ q_{n+1} = p_n \\ r_{n+1} = (q_n + r_n)\cdot\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} p_{n+1} = (q_n + r_n)\cdot\frac{1}{2} \\ q_{n+1} = p_n \\ r_{n+1} = p_{n+1} \end{cases}$$

$$\therefore\ p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_{n-1} + p_n)$$

$$\therefore\ p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{2}(p_n - p_{n-1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(p_{n-1} - p_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p_2 - p_1)$$

ここで，$p_1 = \frac{1}{2}$，$p_2 = \frac{1}{4}$ より　$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdots ①$

同様に，$p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = \cdots = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{2} \cdots ②$　　$\therefore$ ①，② より．$p_n = \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}$

このとき．$q_n = \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}$

$\therefore$ 求める確率は．$p_n + q_n = \underline{\dfrac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}}$ //

東京大学

2015年 文系 第4問　2枚目／2枚．

数理 石井K

$\boxed{4}$ 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを1枚用意し，次のように左から順に文字を書く．

コインを投げ，表が出たときは文字列AAを書き，裏が出たときは文字Bを書く．さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，Bをすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

たとえば，コインを5回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，

AABBAAB

となる．このとき，左から4番目の文字はB，5番目の文字はAである．

(1) n を正の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ．

(2) n を2以上の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ．

(2). $n-1$ 番目に A′ がきて．n 番目に B がくればよいので，

求める確率は．

$$q_{n-1} \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{6}} \quad (n \geqq 2)$$ //