2011年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $r$を正の定数とする．2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{2x^2}{x^2+1}, \quad C_2 : y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

が共有点で互いに直交する接線を持つとする．

(1) 共有点の座標と $r$ の値を求めよ．

(2) $C_1$ と $C_2$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めよ．

(1) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$，$g(x) = \sqrt{r^2-x^2}$，共有点の$x$座標を$\alpha$とおくと，

$f(\alpha) = g(\alpha)$ かつ $f'(\alpha)\cdot g'(\alpha) = -1$ ⋯ (*)

$f'(x) = \frac{4x(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$，$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

(*) $\iff \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = \sqrt{r^2-\alpha^2}$ かつ $\frac{4\alpha}{(\alpha^2+1)^2}\cdot\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\right) = -1$

$\iff 2\alpha^2 = (\alpha^2+1)\sqrt{r^2-\alpha^2}$ かつ $4\alpha^2 = (\alpha^2+1)^2\sqrt{r^2-\alpha^2}$

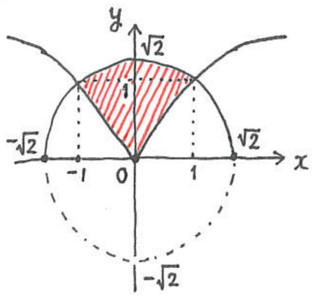
$\iff 4\alpha^2 = (\alpha^2+1)\cdot 2\alpha^2$ かつ $2\alpha^2 = (\alpha^2+1)\sqrt{r^2-\alpha^2}$

$\iff \alpha^2(\alpha+1)(\alpha-1) = 0$ かつ $2\alpha^2 = (\alpha^2+1)\sqrt{r^2-\alpha^2}$

$\iff (\alpha, r) = (0, 0), (1, \pm\sqrt{2}), (-1, \pm\sqrt{2})$

$r > 0$より，$(\alpha, r) = (1, \sqrt{2}), (-1, \sqrt{2})$

∴ 共有点は $(\pm 1, 1)$，$r = \sqrt{2}$ //




(2) 図形は右図のようになり，$y$軸に関して対称であるから，

$$S = 2\int_0^1 \sqrt{2-x^2} - \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx - 4\int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

← はじめの積分は $x = \sqrt{2}\sin\theta$，後の方は，$x = \tan\theta$ として置換積分

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta - 4 + 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= 4\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 4 + 4\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$ //