

2013年 歯学部 第3問

数
理
五
年
K

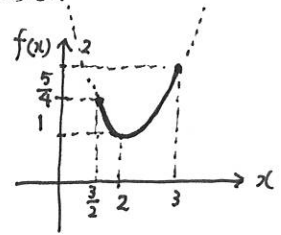
3 $y = x^2 - 4x + 5 + \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ とおくと、次の問いに答えよ。ただし、 $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ とする。

- (1) y の最大値 M と最小値 m の値を求めよ。
 (2) $t = x^2 - 4x + 5$ とおくと、 $z = t^3 - 6t^2 + 12t - 12 + \frac{12}{t} - \frac{6}{t^2} + \frac{1}{t^3}$ を y を用いて表せ。
 (3) z の最大値 N と最小値 n の値を求めよ。
 (4) $K(\log_{64} M + \log_{64} m - \log_{64} N - \log_{64} n) = 1$ をみたす自然数 K の値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ とおくと ($\frac{3}{2} \leq x \leq 3$)

$$f(x) = (x-2)^2 + 1$$

右のグラフよ。 $1 \leq f(x) \leq 2$



ここで、 $t = x^2 - 4x + 5$ とおくと、 $y = t + \frac{1}{t}$ ($1 \leq t \leq 2$)

$\therefore y' = \frac{(t+1)(t-1)}{t^2}$ $\therefore 1 \leq t \leq 2$ において $y' \geq 0$ より y は単調増加。

$\therefore M = \frac{5}{2}, m = 2$ //

(2) $z = (t^3 + \frac{1}{t^3}) - 6(t^2 + \frac{1}{t^2}) + 12(t + \frac{1}{t}) - 12$

$$t^3 + \frac{1}{t^3} = (t + \frac{1}{t})^3 - 3t \cdot \frac{1}{t} (t + \frac{1}{t}) = y^3 - 3y$$

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = (t + \frac{1}{t})^2 - 2 = y^2 - 2$$

$\therefore z = y^3 - 3y - 6(y^2 - 2) + 12y - 12$ $\therefore z = y^3 - 6y^2 + 9y$ //

(3) $z' = 3(y-3)(y-1)$ $\therefore 2 \leq y \leq \frac{5}{2}$ において $z' < 0$ $\therefore z$: 単調減少

$\therefore N = 2, n = \frac{5}{8}$ //

$$\log_{64} M + \log_{64} m - \log_{64} N - \log_{64} n = \log_{64} \frac{Mm}{Nn}$$

$$= \log_{64} 4$$

$$= \frac{\log_2 4}{\log_2 64}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\therefore K = 3$ //