県立広島大学

2012年 第2問

$\boxed{2}$ 直線 $\ell:(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=4$ が，曲線 $C: x^2+y^2=r^2\ (r>0,\ x\geqq 0)$ に接する．次の問いに答えよ．

(1) r の値を求めよ．
(2) 点 $A(a,\ 1)$ が直線 ℓ 上の点であるとき，a の値を求めよ．
(3) (2)で求めた点 A から曲線 C に引いた ℓ 以外の接線 m の方程式を求めよ．
(4) 曲線 C と 2 つの接線 ℓ, m で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) ℓ と C が接する $\Longleftrightarrow$ ℓ と原点とのキョリが r

$$\therefore \frac{|-4|}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}}=r$$

$\therefore 4=2\sqrt{2}\,r \qquad \therefore \underline{r=\sqrt{2}}$ //

(2) $(1+\sqrt{3})a+(1-\sqrt{3})\cdot 1=4$

$\therefore a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\underline{\sqrt{3}}$ //

(3) 接点を (s,t) とおくと，C の接線は

$sx+ty=2$ と表され，これが $A(\sqrt{3},1)$ を通るから

$\sqrt{3}s+t=2$ ・・・①

また，(s,t) は C 上の点より，

$s^2+t^2=2$ ・・・②

①を②に代入して．$s^2+(2-\sqrt{3}s)^2=2$

$\therefore 2s^2-2\sqrt{3}s+1=0 \qquad \therefore s=\dfrac{\sqrt{3}\pm1}{2}$，$t=\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$ （複号同順）

$\therefore$ 接線は．$\underbrace{(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})y=4}_{\ell}$ と $(\sqrt{3}-1)x+(1+\sqrt{3})y=4$

$\therefore \underline{m:(\sqrt{3}-1)x+(1+\sqrt{3})y=4}$ //

(4) $(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=0$ より．$\ell\perp m$

$\therefore$ 右図のようになり，

$S=(\sqrt{2})^2-\pi(\sqrt{2})^2\cdot\dfrac{1}{4}=\underline{2-\dfrac{\pi}{2}}$ //