2014年 第2問

$\boxed{2}$ 2つの曲線 $C_1 : f(x) = x^3 - x$ と $C_2 : g(x) = x^3 + x^2 + ax$ について考える．ただし，a は定数である．曲線 C_1 上の点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{8}\right)$ における接線を ℓ とし，点Aと異なる点 $\mathrm{B}(p,\ q)$ において曲線 C_1 と直線 ℓ は交わっている．以下の問題に答えよ．

(1) 曲線 C_1 を原点に関して対称移動したグラフは C_1 自身であることを証明せよ．

(2) 直線 ℓ の方程式と $p,\ q$ の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の $p \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 関数 $g(x)$ が極値を持たないための必要十分条件を導関数 $g'(x)$ を用いて表せ．また，このときの定数 a の値の範囲を求めよ．

(5) $a = 1$ のとき，2つの曲線 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $C_1 : y = x^3 - x$ を原点に関して対称移動したグラフは，

$-y = (-x)^3 - (-x)$ $\therefore y = x^3 - x$ となり C_1 自身となる ■

(2) $y' = 3x^2 - 1$ $\therefore \ell : y = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8}$ $\therefore \underline{\ell : y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$ //

$x^3 - x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ $\therefore (2x-1)^2(x+1) = 0$ $\therefore \underline{p = -1,\ q = 0}$ //

(3) $f'(x) = 3x^2 - 1$

$\therefore$ 右の増減表より $\begin{cases} \text{最大値 } \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}\right) \\ \text{最小値 } -\frac{3}{8} \left(x = \frac{1}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$ //

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{3}{8}$

(4) $g'(x) = 3x^2 + 2x + a$ $\therefore$ $g'(x)$ は下に凸の関数であるから

$\therefore$ $g(x)$ が極値をもたない必要十分条件は $\underline{g'(x) \geqq 0}$ //

このときの a の範囲は，$D/4 = 1 - 3a \leqq 0$ $\therefore \underline{a \geqq \frac{1}{3}}$ //

(5) $x^3 - x - x^3 - x^2 - x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + 2x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x(x+2) = 0$ $\therefore x = 0, -2$

$\therefore S = \int_{-2}^{0} x^3 - x - x^3 - x^2 - x \, dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^{0}$

$= \underline{\frac{4}{3}}$ //