2015年 第3問　　1枚目／2枚.

$\boxed{3}$ $f(x)=\log x\ (x>0)$ とし，曲線 $C_1 : y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とする．直線 ℓ と曲線 $C_2 : y=(x-\sqrt{2})^2$ で囲まれた図形の面積を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) S を t を用いて表せ．

(2) S を最小にする t の値を求めよ．ただし，そのときの S の値は求めなくてよい．

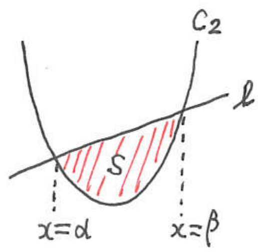
(1) $f'(x)=\frac{1}{x}$ より. $\ell : y=\frac{1}{t}(x-t)+\log t$ 　　$\therefore\ \ell : y=\frac{1}{t}x-1+\log t$

ℓ と C_2 の交点の x 座標を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと.

$x^2-2\sqrt{2}x+2-\frac{1}{t}x+1-\log t=0$ において.

解と係数の関係から. $\alpha+\beta=2\sqrt{2}+\frac{1}{t}$ $\cdots①$, $\alpha\beta=3-\log t$ $\cdots②$

$\therefore$ 右のグラフより.



$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{t}x-1+\log t-(x-\sqrt{2})^2\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots③$$

ここで，①，② より. $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=\left(2\sqrt{2}+\frac{1}{t}\right)^2-4(3-\log t)$$

$$=\frac{1}{t^2}+\frac{4\sqrt{2}}{t}-4+4\log t$$

$\beta-\alpha>0$ より. $\beta-\alpha=\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{4\sqrt{2}}{t}-4+4\log t}$

③ に代入して.

$$\underline{S=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{4\sqrt{2}}{t}-4+4\log t\right)^{\frac{3}{2}}}\ //$$

2枚目につづく.

2015年第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x) = \log x$ $(x > 0)$ とし，曲線 $C_1 : y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とする．直線 ℓ と曲線 $C_2 : y = (x - \sqrt{2})^2$ で囲まれた図形の面積を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) S を t を用いて表せ．

(2) S を最小にする t の値を求めよ．ただし，そのときの S の値は求めなくてよい．

(2) $g(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{4\sqrt{2}}{t} - 4 + 4\log t$ とおくと．$(t > 0)$

$$g'(t) = -\frac{2}{t^3} - \frac{4\sqrt{2}}{t^2} + \frac{4}{t}$$

$$= \frac{4t^2 - 4\sqrt{2}t - 2}{t^3}$$

$$= \frac{2(2t^2 - 2\sqrt{2}t - 1)}{t^3}$$

$\therefore$ $g'(t) = 0$ の解は．$t = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because t > 0$ より$)$

t	0	$\cdots$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	／	$-$	0	$+$
$g(t)$	／	↘		↗

$\therefore$ 右の増減表より．

$g(t)$ の最小値をとるときの t は．

$t = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

すなわち．S を最小にする t は　$\underline{t = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$ //