

2016年 医学部 第2問

2 分母が奇数、分子が整数の分数で表せる有理数を「控えめな有理数」と呼ぶことにする。例えば  $-\frac{1}{3}$ , 2 はそれぞれ  $-\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{1}$  と表せるから、ともに控えめな有理数である。1 個以上の有限個の控えめな有理数  $a_1, \dots, a_n$  に対して、集合  $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  を、

$$S\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \mid x_1, \dots, x_n \text{ は控えめな有理数}\}$$

と定める。例えば 1 は  $1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot 2$  と表せるから、 $S\langle -\frac{1}{3}, 2 \rangle$  の要素である。

- (1) 控えめな有理数  $a_1, \dots, a_n$  が定める集合  $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  の要素は控えめな有理数であることを示せ。
- (2) 0 でない控えめな有理数  $a$  が与えられたとき、 $S\langle a \rangle = S\langle 2^t \rangle$  となる 0 以上の整数  $t$  が存在することを示せ。
- (3) 控えめな有理数  $a_1, \dots, a_n$  が与えられたとき、 $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle = S\langle b \rangle$  となる控えめな有理数  $b$  が存在することを示せ。
- (4) 2016 が属する集合  $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  はいくつあるか。ただし  $a_1, \dots, a_n$  は控えめな有理数であるとし、 $a_1, \dots, a_n$  と  $b_1, \dots, b_m$  が異なっても、 $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle = S\langle b_1, \dots, b_m \rangle$  であれば、 $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  と  $S\langle b_1, \dots, b_m \rangle$  は一つの集合として数える。