

2012年工学部第3問

3 a, b は定数で $a \neq 0$ とする. 自然数 n に対して, 整式 $(ax + b)^n$ を $x^2 + 1$ で割った余りを $a_n x + b_n$ と表し,

$$I_n = \int_0^1 \frac{(ax + b)^n}{x^2 + 1} dx$$

とおく.

(1) 行列 A は, すべての n に対して,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

を満たす. 行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A に対し,

$$A^2 + pA + qE = O$$

となる定数 p, q を a, b を用いて表せ. ただし, E は単位行列, O は零行列である.

(3) (2) で求めた p, q に対し, 定積分

$$I_{n+2} + pI_{n+1} + qI_n$$

を求めよ.

(4) $a = 1, b = -1$ のとき I_5 を求めよ.