2014 年 環境情報学部 第 2 問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 |x-a|(x+1)\,dx$ を最小にする a の値は

$$a = \overset{-}{\boxed{18}}\overset{1}{\boxed{19}} + \frac{\boxed{20}\overset{1}{\boxed{21}}}{\boxed{22}\underset{2}{\boxed{23}}}\sqrt{\underset{1}{\boxed{24}}\underset{0}{\boxed{25}}}$$

である．

(2) $f(a)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ における $|x-a|(x+1)$ の最大値とする．このとき $f(a)$ を最小にする a の値は

$$a = \frac{\boxed{26}\boxed{27}}{\boxed{28}\boxed{29}}\begin{matrix}2\\3\end{matrix}$$

である．

(1) (i) $a<0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において $x-a \geqq 0$ なので

$$\int_0^1 |x-a|(x+1)\,dx = \int_0^1 (x-a)(x+1)\,dx$$
$$= \int_0^1 x^2+(1-a)x-a\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{1-a}{2}x^2-ax\right]_0^1$$
$$= -\frac{3}{2}a+\frac{5}{6}$$ (単調減少)

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$\int_0^1 |x-a|(x+1)\,dx = \int_0^a (a-x)(x+1)\,dx + \int_a^1 (x-a)(x+1)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{1-a}{2}x^2+ax\right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{1-a}{2}x^2-ax\right]_a^1$$
$$= \frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}+\frac{5}{6}-\frac{3}{2}a+\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}$$
$$= \frac{a^3}{3}+a^2-\frac{3}{2}a+\frac{5}{6}$$

これを $g(a)$ とおくと，$g'(a) = a^2+2a-\frac{3}{2}$　$\therefore g'(a)=0$ となるのは，

$a = -1+\frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\alpha = -1+\frac{1}{2}\sqrt{10}$ とした

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$	$\frac{5}{6}$	↘		↗	$\frac{2}{3}$

(iii) $a>1$ のとき

$$\int_0^1 |x-a|(x+1)\,dx = -\int_0^1 (x-a)(x+1)\,dx$$
$$= \frac{3}{2}a-\frac{5}{6}$$ (単調増加)

(i)〜(iii) より，与式を最小にする a は，$\underline{a = -1+\frac{1}{2}\sqrt{10}}$ 〃

2014年 環境情報学部 第2問　　2枚目／2枚

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\int_0^1 |x-a|(x+1)\,dx$ を最小にする a の値は

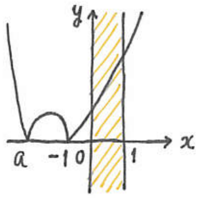
$$a = \boxed{18}\boxed{19} + \frac{\boxed{20}\boxed{21}}{\boxed{22}\boxed{23}}\sqrt{\boxed{24}\boxed{25}}$$

である．

(2) $f(a)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ における $|x-a|(x+1)$ の最大値とする．このとき $f(a)$ を最小にする a の値は

$$a = \frac{\boxed{26}\boxed{27}}{\boxed{28}\boxed{29}}$$

である．



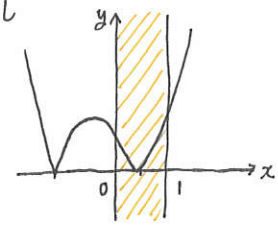
(2) (i) $a < 0$ のとき．

最大値をとるのは

$x=1$ のときなので $f(a) = 2(1-a)$

$= -2a+2$

また，$f(a)$ の最小値 なし



(iii) $0 \leqq a < 1$ のとき．

$f(a) =$ a と $(1-a)\cdot 2$ の小さくない方

$$\therefore f(a) = \begin{cases} -2a+2 & \left(0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}\right) \\ a & \left(\frac{2}{3} \leqq a < 1\right) \end{cases}$$

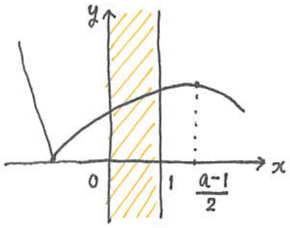
$\therefore$ $f(a)$ の最小値は $\frac{2}{3}$ $\left(a = \frac{2}{3}\text{ のとき}\right)$

(ii) $\frac{a-1}{2} > 1$ のとき．すなわち $a > 3$ のとき．

(i) と同様 $x=1$ で最大値をとり．$f(a) = |1-a|\cdot 2$

$= 2a-2$

$f(a)$ の最小値なし

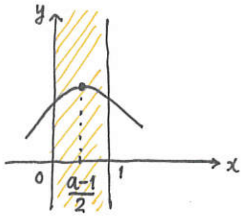


(iv) $1 \leqq a \leqq 3$ のとき．

最大値は $x = \frac{a-1}{2}$ のとき

$\therefore f(a) = \left|\frac{a-1}{2} - a\right| \cdot \frac{a+1}{2}$

$= \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$



$\therefore$ $f(a)$ の最小値は 1 ($a=1$ のとき)

(i)～(iv)より $f(a)$ を最小にする a は，$\underline{a = \frac{2}{3}}$ //