

# 富山大学

2014年薬学部第2問

2 点  $P_0$  を  $xy$  平面の原点とし、点  $P_1$  の座標を  $(1, 0)$  とする。点  $P_2, P_3, P_4, \dots$  を次のように定める。 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、点  $P_{n-1}$  を中心として点  $P_n$  を反時計回りに  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) だけ回転させた点を  $Q_n$  とし、点  $P_{n+1}$  を  $\overrightarrow{P_{n-1}Q_n} = \overrightarrow{P_nP_{n+1}}$  となるようにとる。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $k = 0, 1, 2, \dots$  に対して、

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left\{ -\sin \left( \frac{2k-1}{2} \theta \right) + \sin \left( \frac{2k+1}{2} \theta \right) \right\}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left\{ \cos \left( \frac{2k-1}{2} \theta \right) - \cos \left( \frac{2k+1}{2} \theta \right) \right\}$$

が成り立つことを示せ。

(2)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、

$$1 + \cos \theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \sin \left( \frac{2n+1}{2} \theta \right) + \sin \frac{\theta}{2} \right\}$$

$$\sin \theta + \dots + \sin n\theta = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left\{ -\cos \left( \frac{2n+1}{2} \theta \right) + \cos \frac{\theta}{2} \right\}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 点  $P_n$  の座標を  $(x_n, y_n)$  とおくと、 $x_n$  および  $y_n$  を求めよ。

(4) すべての点  $P_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を通る円の方程式を求めよ。