0001799270028999

京都教育大学

2012年 教育学部 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 2つの関数

$$f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$

について，次の問に答えよ．

(1) 導関数の定義に従って $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ において常に $f(x) \leqq g(x)$ であることを証明せよ．

(4) 2つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(1) 定義より．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3+1-x^3-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3hx + h^2$$

$$= \underline{3x^2} \,//$$

(2) $f'(x) = 3x^2$，$f''(x) = 6x$ より．

$f'(1) = 3$，$f''(1) = 6$

また，$f(1) = 2$

$$\therefore g(x) = 2 + 3(x-1) + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot (x-1)^2$$

$$= \underline{3x^2 - 3x + 2} \,//$$

(3) $g(x) - f(x) = 3x^2 - 3x + 2 - x^3 - 1$

$$= -(x-1)^3$$

$0 \leqq x \leqq 1$ において．$x - 1 \leqq 0$ より

$g(x) - f(x) \geqq 0 \quad \therefore f(x) \leqq g(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ ▨

(4) (3)と同様にて

$g(x) - f(x) = -(x-1)^3$ より．

2つの曲線の交点の x 座標は $x = 1$ のみ

$$\therefore S = \int_0^1 g(x) - f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 -(x-1)^3\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_0^1$$

$$= \underline{\frac{1}{4}} \,//$$

この形のまま積分できるように慣れよう．