



数理
石井K

2015年文系第3問

3 側面の展開図が、半径10、中心角 x の扇形である円錐を作る。この円錐の体積の最大値と、そのときの x の値を求めよ。ただし、 $0^\circ < x < 360^\circ$ とする。

底面の円の半径を r 、円錐の高さを h とおく

∴ 展開図より、

$$20\pi \cdot \frac{x}{360^\circ} = 2\pi r \quad \therefore x = 36^\circ \times r \quad \dots \textcircled{1}$$

あとで使う

また、三平方の定理より、 $h^2 + r^2 = 100 \quad \dots \textcircled{2}$

円錐の体積を $V(h)$ とおくと、

$$\begin{aligned} V(h) &= \pi r^2 \cdot h \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (100 - h^2) \quad (\because \textcircled{2} \text{より}) \\ &= \frac{\pi}{3} (100h - h^3) \end{aligned}$$

$$\therefore V'(h) = \frac{\pi}{3} (100 - 3h^2)$$

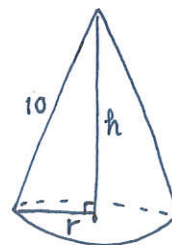
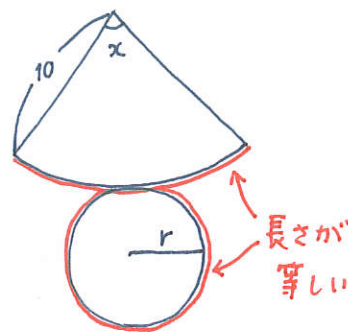
$$\therefore V'(h) = 0 \text{となるのは、} h > 0 \text{より、} h = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

∴ 右の増減表より、 $V(h)$ の最大値は

$$\begin{aligned} V\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{1000}{\sqrt{3}} - \frac{1000}{3\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{2000}{27} \sqrt{3} \pi \end{aligned}$$

$$\text{このとき} \textcircled{2} \text{より、} \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + r^2 = 100 \quad \therefore r = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{これを} \textcircled{1} \text{に代入して、} \underline{x = 120\sqrt{6}^\circ}$$



h	(0)	\dots	$\frac{10}{\sqrt{3}}$	\dots
$V'(h)$		$+$	0	$-$
$V(h)$		\nearrow		\searrow