弘前大学

2014年 理系 第3問

数理 石井K

3 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $4P+Q=A$ と $P+Q=E$ を満たす2次正方行列 P, Q を求めよ．

(2) (1)で求めた P, Q に対して，PQ, QP を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(4) A^n の逆行列を $B_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする．極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n$, $\lim_{n\to\infty} d_n$ を求めよ．

(1) $\begin{cases} 4P+Q=A \\ P+Q=E \end{cases} \iff \begin{cases} P=\frac{1}{3}(A-E) \\ Q=\frac{1}{3}(-A+4E) \end{cases} \iff \underline{P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ //

(2) $PQ=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=O$, $QP=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=O$

$\therefore \underline{PQ=QP=O}$ //

(3) $4P+Q=A$ より，$A^n=(4P+Q)^n$

二項定理と(2)より $A^n=4^nP^n+Q^n$

ここで，計算により，$P^2=P$, $Q^2=Q$ が分かるので，$A^n=4^nP+Q$

$\therefore A^n=\frac{4^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & -2\cdot 4^n+2 \\ -4^n+1 & 2\cdot 4^n+1 \end{pmatrix}}$ //

(4) $\det(A^n)=\frac{1}{9}\left\{(4^n+2)(2\cdot 4^n+1)-(-2\cdot 4^n+2)(-4^n+1)\right\}$

$=4^n$

$\therefore B_n=\frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 2\cdot 4^n+1 & 2\cdot 4^n-2 \\ 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2\cdot 4^n+1}{3\cdot 4^n} & \frac{2\cdot 4^n-2}{3\cdot 4^n} \\ \frac{4^n-1}{3\cdot 4^n} & \frac{4^n+2}{3\cdot 4^n} \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{3},\ \lim_{n\to\infty} b_n=\frac{2}{3},\ \lim_{n\to\infty} c_n=\frac{1}{3},\ \lim_{n\to\infty} d_n=\frac{1}{3}}$ //