0001641818538999

# 北海道大学

2014年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 2つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + \frac{3}{2}, \quad C_2 : y = (x-a)^2 + a \quad (a > 0)$$

がある．点 $P_1\left(p,\ -p^2 + \frac{3}{2}\right)$ における $C_1$ の接線を $\ell_1$ とする．

(1) $C_1$ と $C_2$ が共有点を持たないための $a$ に関する条件を求めよ．

(2) $\ell_1$ と平行な $C_2$ の接線 $\ell_2$ の方程式と，$\ell_2$ と $C_2$ の接点 $P_2$ の座標を $a$，$p$ を用いて表せ．

(3) $C_1$ と $C_2$ が共有点を持たないとする．(2) で求めた $P_2$ と $P_1$ を結ぶ線分が $\ell_1$ と垂直になるとき，$p$ を求めよ．

(1) $(x-a)^2 + a - \left(-x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0$ が実数解をもたなければよいので

$2x^2 - 2ax + a^2 + a - \frac{3}{2} = 0$ の判別式を $D$ とおくと，

$D/4 = a^2 - 2\cdot\left(a^2 + a - \frac{3}{2}\right)$

$= -(a+3)(a-1)$

$\therefore -(a+3)(a-1) < 0$ これより，$a < -3,\ 1 < a$

$a > 0$ なので，$\underline{a > 1}$ //

(2) $C_1$ において，$y' = -2x$ より

$\ell_1 :\ y = -2p(x-p) - p^2 + \frac{3}{2}$

$\ell_2$ を $y = -2px + t$ とおくと

$(x-a)^2 + a + 2px - t = 0$ が重解をもつ

$\therefore x^2 - 2(a-p)x + a^2 + a - t = 0$

$D/4 = (a-p)^2 - (a^2 + a - t)$

$= -2ap + p^2 - a + t = 0$

これより，$t = 2ap - p^2 + a$

よって，$\ell_2 :\ \underline{y = -2px - p^2 + 2ap + a}$ // また，$\underline{P_2(a-p,\ a+p^2)}$ //

(3) $P_1\left(p,\ -p^2 + \frac{3}{2}\right)$，$P_2(a-p,\ a+p^2)$

より，$\dfrac{a + p^2 + p^2 - \frac{3}{2}}{a - p - p} \times (-2p) = -1$

これを解くと

$(2p-1)(2p^2 + p + a) = 0$

$2p^2 + p + a = 2\left(p + \frac{1}{4}\right)^2 + a - \frac{1}{8}$ より

(1) から $a > 1$ なので $> 0$

$\therefore\ \underline{p = \frac{1}{2}}$ //