秋田大学

2016年 医学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ i を虚数単位とする．複素数 z が等式 $|iz+3|=|2z-6|$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) この等式を満たす点 z 全体は，どのような図形を表すか答えよ．

(2) $z-\overline{z}=0$ を満たす z を求めよ．

(3) $|z+i|$ の最大値を求めよ．

(1) (与式) $\iff |i(z-3i)| = 2|z-3|$

$\iff |i|\cdot|z-3i| = 2|z-3|$

$\iff |z-3i| = 2|z-3|$

よって，$|z-3i|^2 = 4|z-3|^2$

$(z-3i)(\overline{z-3i}) = 4(z-3)(\overline{z-3})$

$(z-3i)(\overline{z}+3i) = 4(z-3)(\overline{z}-3)$

$|z|^2+3iz-3i\overline{z}+9 = 4(|z|^2-3z-3\overline{z}+9)$

$\therefore 3|z|^2-12z-12\overline{z}-3iz+3i\overline{z}+27=0$

$|z|^2-4z-4\overline{z}-iz+i\overline{z}+9=0$

$(z-(4-i))(\overline{z}-(4+i)) = 8$

$\therefore (z-(4-i))(\overline{z-(4-i)}) = 8$

$|z-(4-i)|^2 = 8$

$\therefore |z-(4-i)| = 2\sqrt{2}$ $\cdots$①

$\therefore$ 点 z 全体は，中心 $4-i$，半径 $2\sqrt{2}$ の円を表す //

(2) $z-\overline{z}=0 \iff z=\overline{z}$

$\iff$ z は実数

① より，$|(z-4)+i| = 2\sqrt{2}$

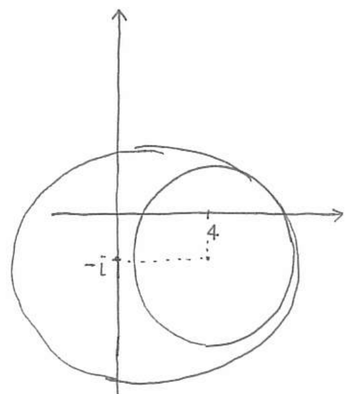
$\therefore (z-4)^2+1 = 8$

$(z-4)^2 = 7$

$\therefore z = 4\pm\sqrt{7}$ //

(3) $|z+i| = k$ (k は正の実数) とおくと，

これは，中心 $-i$，半径 k の円を表す



(1) の円と上図のように接するとき，k が最大となるので，

$k-2\sqrt{2} = 4$

$\therefore k = 4+2\sqrt{2}$ //