2015年 理系 第6問

$\boxed{6}$ n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1\text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1\text{ のとき})\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする．$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1\text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1\text{ のとき})\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$