



2014年理系第2問

2  $a$  を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋  $U$  に対して、次の操作  $(*)$  を考える。

- $(*)$  袋  $U$  から球を 1 個取り出し、
- (i) 取り出した球が白球のときは、袋  $U$  の中身が白球  $a$  個、赤球 1 個となるようにする。
- (ii) 取り出した球が赤球のときは、その球を袋  $U$  へ戻すことなく、袋  $U$  の中身はそのままにする。

はじめに袋  $U$  の中に、白球が  $a + 2$  個、赤球が 1 個入っているとす。この袋  $U$  に対して操作  $(*)$  を繰り返し行う。

たとえば、1 回目の操作で白球が出たとすると、袋  $U$  の中身は白球  $a$  個、赤球 1 個となり、さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると、袋  $U$  の中身は白球  $a$  個のみとなる。

$n$  回目に取り出した球が赤球である確率を  $p_n$  とす。ただし、袋  $U$  の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

- (1)  $p_1, p_2$  を求めよ。
- (2)  $n \geq 3$  に対して  $p_n$  を求めよ。
- (3)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_n$  を求めよ。