



2014年理系第1問

1 n を 3 以上の整数とし, a, b, c は 1 以上 n 以下の整数とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $a < b < c$ となる a, b, c の組は何通りあるか.
 (2) $a \leq b \leq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか.
 (3) $a < b$ かつ $a \leq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか.

$$(1) \quad n C_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad \text{通り}$$

(2) (1) の場合に加えて次の場合がある.

(i) $a = b < c$ の場合

$$n C_2 \text{ 通り.}$$

(ii) $a < b = c$ の場合

$$n C_2 \text{ 通り.}$$

(iii) $a = b = c$ の場合

$$n C_1 \text{ 通り.}$$

(1) と (i), (ii), (iii) より

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad \text{通り}$$

(3)

(i) $a < b < c$ となる場合

(1) と同じ

(ii) $a < c < b$ となる場合

(1) と同じ

(iii) $a < b = c$ となる場合

(2) (ii) と同じ

$a < b$
かつ
 $a < c$
の場合

(iv) $a = c < b$ の場合

$n C_2$ 通り.

(i) ~ (iv) より

$$2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad \text{通り}$$