



2012年理系第6問

6 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1)  $n \geq 2$  のとき,  $a_n > 1$  となることを示せ。
- (2)  $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$  を満たす正の実数  $\alpha$  を求めよ。
- (3) すべての自然数  $n$  に対して  $a_n < \alpha$  となることを示せ。
- (4)  $0 < r < 1$  を満たすある実数  $r$  に対して, 不等式

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。さらに, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。