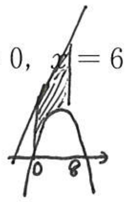
東北薬科大学

2014 年 薬学部 第 1 問

$\boxed{1}$ 放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=2x+t$ $(t \geqq 0)$ と直線 $x=0$，$x=6$ とで囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．このとき，次の問に答えなさい．



(1) $S(12)=\boxed{アイ}$ である．（36）

(2) $S(t)$ が 3 つの部分の面積の和になるのは $\boxed{ウ}<t<\boxed{エ}$ のときである．（0, 9）このとき $S(t)$ は

$$\boxed{オ}(t-\boxed{カ})+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}(\boxed{ケ}-t)\sqrt{\boxed{ケ}-t}$$

（オ 6，カ 6，キ 8，ク 3，ケ 9，ケ 9）

である．

(3) 以下 $\boxed{ウ}<t<\boxed{エ}$ で考える．$A=\sqrt{\boxed{ケ}-t}$ とおく．$S(t)$ を A で表すと

$$S(t)=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}A^3-\boxed{シ}A^2+\boxed{スセ}$$

（コ 8，サ 3，シ 6，スセ 18）

となる．また $A=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ のとき $S(t)$ は最小値 $\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$ をとる．（ソ 3，タ 2，チツ 27，テ 2）

(1) $S(12)=\int_0^6 2x+12+x^2-8x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+12x\right]_0^6=\underline{36}$

(2) $f(x)=2x+t$ とおくと，$f(6)>12$ かつ $x^2-6x+t=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ

$\therefore\ 12+t>12$ かつ $D/4=9-t>0$ $\quad\therefore\ \underline{0<t<9}$

$x^2-6x+t=0$ の解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと．

$$S(t)=\int_0^\alpha x^2-6x+t\,dx+\int_\alpha^\beta -x^2+6x-t\,dx+\int_\beta^6 x^2-6x+t\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+tx\right]_0^\alpha-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+tx\right]_\beta^6$$

$$=\underline{6(t-6)+\frac{8}{3}(9-t)\sqrt{9-t}}$$

(3)

$$\underline{S(t)=\frac{8}{3}A^3-6A^2+18}$$

$S'=8A^2-12A$

$\quad=4A(2A-3)$

A	(0)	…	$\frac{3}{2}$	…	(3)
S′	(0)	−	0	+	
S		↘	$\frac{27}{2}$	↗	

極小

$\therefore\ \underline{A=\frac{3}{2}\text{ のとき最小値 }\frac{27}{2}}$