0002057272497999

東北薬科大学

2015年 薬学部 第2問

数理 石井K

2 $x^2-12x+y^2-24y+160=0$ で表される円を C とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 円 C の中心 P は（ ア 6 ， イウ 12 ）で半径は エ 2 $\sqrt{\text{オ}}$ 5 である．

(2) 原点 O(0, 0) と中心 P を通る直線 ℓ を考える．直線 ℓ と円 C の交点を原点に近い方から Q，R とおくと点 Q の x 座標は カ 4，点 R の x 座標は キ 8 である（ カ ＜ キ ）．

(3) 直線 ℓ に平行で y 切片が k の直線を $\ell(k)$ とおく．ただし $0<k$ とする．直線 $\ell(k)$ と円 C が異なる 2 交点 S，T をもつような k の値の範囲は $0<k<$ クケ 10 である．この 2 交点の x 座標を α，β とおくと $\alpha+\beta=$ コサ 12 $-\dfrac{\text{シ}\ 4}{\text{ス}\ 5}k$ である．

(4) このとき $\mathrm{ST}^2=$ セソ 80 $-\dfrac{\text{タ}\ 4}{\text{チ}\ 5}k^2$ である．ST の中点を U とおくと $\mathrm{PU}^2=\dfrac{\text{ツ}\ 1}{\text{テ}\ 5}k^2$ なので三角形 PST の面積は $k=$ ト 5 $\sqrt{\text{ナ}}$ 2 のとき最大値 ニヌ 10 をとる．

(1) $C:(x-6)^2+(y-12)^2=(2\sqrt{5})^2$

∴ 中心は $(6,12)$，半径 $2\sqrt{5}$ //

(2) $\ell: y=2x$ となるので (1) の C の式に代入して．

$(x-6)^2+(2x-12)^2=20$

∴ $5(x-6)^2=20$

∴ $x=4,\ 8$

Q の x 座標は 4，R の x 座標は 8 //

(3) $\ell(k): y=2x+k$

これを C の式に代入して整理すると． （点と直線のキョリ公式でもとける）

$5x^2+(4k-60)x+k^2-24k+160=0 \cdots (*)$

判別式を D とおくと．

$D/4=(2k-30)^2-5\cdot(k^2-24k+160)$

$=-k^2+100$

$D>0$ より．$-k^2+100>0$

$k>0$ より．$0<k<10$ //

$(*)$ において．解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{4k-60}{5}=12-\dfrac{4}{5}k$ //

(4) (3) と $\alpha\beta=\dfrac{k^2-24k+160}{5}$ より．

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

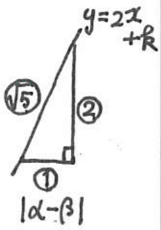
$=144-\dfrac{96}{5}k+\dfrac{16}{25}k^2-\dfrac{4}{5}k^2+\dfrac{96}{5}k-\dfrac{640}{5}$

$=16-\dfrac{4}{25}k^2$

$\mathrm{ST}^2=\left(|\alpha-\beta|\cdot\sqrt{5}\right)^2$

$=(\alpha-\beta)^2\cdot 5$

$=80-\dfrac{4}{5}k^2$ //

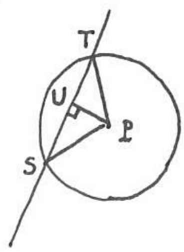


$\mathrm{PU}^2=\mathrm{PT}^2-\mathrm{TU}^2$

$=20-\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{ST}\right)^2$

$=20-\dfrac{1}{4}\left(80-\dfrac{4}{5}k^2\right)$

$=\dfrac{1}{5}k^2$ //



$(\triangle \mathrm{PST})^2=\dfrac{1}{4}\left(80-\dfrac{4}{5}k^2\right)\cdot\dfrac{1}{5}k^2=-\dfrac{1}{25}(k^2-50)^2+100$

∴ $k^2=50$ すなわち $k=5\sqrt{2}$ のとき．//

最大値 10 をとる //