

2014年 医学部 第3問

3 空間に、同一直線上にない3点  $O, A, B$  があり、条件

$$|\vec{OA}| = 2, \quad |\vec{OB}| = 1, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1$$

を満たしている。  $O, A, B$  を通る平面を  $\alpha$  とし、  $\alpha$  上にない点  $P$  を次の条件を満たすようにとる。

$$\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 2, \quad \vec{OP} \cdot \vec{OB} = -1$$

点  $P$  から平面  $\alpha$  に下ろした垂線と  $\alpha$  との交点を  $H$  とすると

$$\vec{OH} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \vec{OA} - \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} \vec{OB}$$

となる。  $|\vec{OP}| = p$  とおくと、  $\triangle OPH$  の面積は

$$\frac{\text{オ}}{\text{カ}} \sqrt{\text{キ} p^2 - \text{ク}}$$

と表される。

$\triangle OAB$  の面積が  $\triangle OPH$  の面積の2倍に等しいとき

$$p^2 = \frac{\text{ケコ}}{\text{サシ}}$$

である。またこのとき、  $\vec{PQ} = \frac{5}{3} \vec{PO}$  を満たす点  $Q$  をとると、四面体  $QOAH$  の体積は

$$\frac{\sqrt{\text{ス}}}{\text{セソ}}$$

である。