東北薬科大学

2015年 薬学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 三角形OABはOA $=6$，OB $=2\sqrt{5}$，AB $=2\sqrt{2}$である．点Pは辺ABを$k:(1-k)$に，点Qは辺OBを$(1-k^2):k^2$に内分する点である．ただし$0<k<1$とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $\overrightarrow{OP}=(\boxed{ア}-\boxed{イ})\vec{a}+\boxed{ウ}\vec{b}$である．　1　k　k

(2) ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積は$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{エオ}$である．　24

(3) 点Bから直線OAに下ろした垂線をBRとおくと$\overrightarrow{OR}=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\vec{a}$である．　2　3

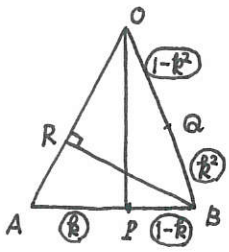
(4) $\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\vec{a}+(\boxed{コ}-\boxed{サ}^{\boxed{シ}})\vec{b}$である．　2　3　1　k　2

(5) ベクトル$\overrightarrow{RP}$と$\overrightarrow{RQ}$の内積は

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\boxed{ス}k^3-\boxed{セ}k^2+\boxed{ソ}k$$

4　8　4

である．この値は$k=\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$で最大値$\dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{トナ}}$をとる．　1　3　16　27



k	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$		$+$	0	$-$	0
$f(k)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{16}{27}$	$\searrow$	(0)

(5)の増減表

(1) $\overrightarrow{OP}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ //

(2) 余弦定理より．$\angle AOB=\theta$とおくと．

$(2\sqrt{2})^2=6^2+(2\sqrt{5})^2-2\cdot6\cdot2\sqrt{5}\cos\theta$　　$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta=6\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=24$$ //

(3) $\overrightarrow{OR}=t\vec{a}$とおくと．$\overrightarrow{BR}=t\vec{a}-\vec{b}$

BR⊥OAより$\overrightarrow{BR}\cdot\vec{a}=0$となるので．

$$(t\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=t|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=36t-24$$

$\therefore\ t=\dfrac{2}{3}$　$\therefore\ \overrightarrow{OR}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$ //

(4) $\overrightarrow{OQ}=(1-k^2)\vec{b}$より

$\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+(1-k^2)\vec{b}$ //

(5) $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}=\left(\dfrac{1}{3}-k\right)\vec{a}+k\vec{b}$

$$\therefore\ \overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\left\{\left(\frac{1}{3}-k\right)\vec{a}+k\vec{b}\right\}\cdot\left\{-\frac{2}{3}\vec{a}+(1-k^2)\vec{b}\right\}$$
$$=-24\left(\frac{1}{3}-k\right)+\left(\frac{1}{3}-k\right)(1-k^2)\cdot24-\frac{2}{3}k\cdot24+k(1-k^2)\cdot20$$
$$=4k^3-8k^2+4k$$ //

これを$f(k)$とおくと．$f'(k)=12k^2-16k+4=4(3k-1)(k-1)$

上の増減表より．$k=\dfrac{1}{3}$で最大値$\dfrac{16}{27}$ //