0001883726118999

東北薬科大学

2011 年 薬学部 第 2 問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 中心が O で半径 1 の円上の点 A，B，C に対し

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+4k\overrightarrow{OC}=\vec{0} \quad \text{（零ベクトル）}$$

を満たす実数 k が存在するという．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 特に $k=0$ のとき AB $=\boxed{\text{ア}}$ である．　2

以下 $0<k$ とする．

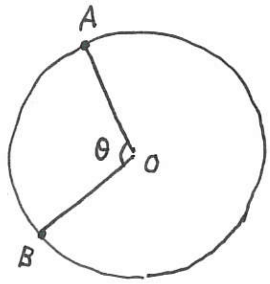
(2) $\angle AOB=\theta$ とおく．$0<\theta<\pi$ とするとき，$k=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cos\dfrac{\theta}{\boxed{\text{エ}}}$ が成り立つ．　イ 1，ウ 2，エ 2

(3) $F=AB^2+BC^2+CA^2$ を k の式で表すと

$F=\boxed{\text{オカキ}}k^2+\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{ケ}}$　オカキ −16，ク 8，ケ 8

である．

(4) F は $k=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる．　コ 1，サ 4，シ 9



(1) $k=0$ のとき．$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$　∴ AB は円の直径となり．$\underline{AB=2}$ //

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot1\cdot\cos\theta=\cos\theta$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-4k\overrightarrow{OC}$ より．$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=16k^2|\overrightarrow{OC}|^2$

$\therefore 16k^2=2+2\cos\theta$　$\therefore 4k^2=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　$\therefore k^2=\dfrac{1}{4}\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$k>0$ より．$\underline{k=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$ //　$(\because 0<\theta<\pi)$

(3) $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}-4k\overrightarrow{OC}$ より．$|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+16k^2|\overrightarrow{OC}|^2+8k\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$\therefore \cos\angle BOC=-2k$　同様に $\cos\angle AOC=-2k$

$\therefore AB^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta=4-16k^2$

$BC^2=CA^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot(-2k)=4k+2$

$\therefore \underline{F=-16k^2+8k+8}$ //

(4) $F=-16\left(k-\dfrac{1}{4}\right)^2+9$　∴ $\underline{k=\dfrac{1}{4}\text{ のとき．最大値 } 9 \text{ をとる}}$ //