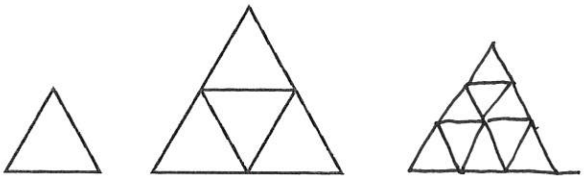
0001800909918999

東北薬科大学

2014年 薬学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 一辺の長さが1である正三角形を右図のように一段ずつ積み重ねていき，k段積み重ねた図形をF_kとおく．図形F_kに表れる一辺の長さがnである上向きの正三角形△の個数を$F_k(n)$とおく（下向きの正三角形▽は考えない）．例えば$F_2(1)=3$，$F_2(2)=1$である．このとき，次の問に答えなさい．



F_1　　F_2

(1) $F_3(1)=\overset{6}{\boxed{\text{ア}}}$，$F_3(2)=\overset{3}{\boxed{\text{イ}}}$，$F_3(3)=\overset{1}{\boxed{\text{ウ}}}$である．

(2) 図形F_kに表れる一辺の長さが1である上向きの正三角形の個数は

$$F_k(1)=\frac{\overset{k}{\boxed{\text{エ}}}\left(\overset{k}{\boxed{\text{エ}}}+\overset{1}{\boxed{\text{オ}}}\right)}{\underset{2}{\boxed{\text{カ}}}}$$

である．

(3) 図形F_kに表れる一辺の長さがnである上向きの正三角形の個数は

$$F_k(n)=\frac{\left(\overset{k}{\boxed{\text{キ}}}-n+\overset{1}{\boxed{\text{ク}}}\right)\left(\overset{k}{\boxed{\text{ケ}}}-n+\overset{2}{\boxed{\text{コ}}}\right)}{\boxed{\text{サ}}\,2}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ク}}<\boxed{\text{コ}}$となるように表しなさい．

(4) 図形F_kに表れる上向きの正三角形の個数は全部で

$$\frac{\overset{k}{\boxed{\text{シ}}}\left(\overset{k}{\boxed{\text{ス}}}+\overset{1}{\boxed{\text{セ}}}\right)\left(\overset{k}{\boxed{\text{ソ}}}+\overset{2}{\boxed{\text{タ}}}\right)}{\boxed{\text{チ}}\,6}$$

である．ただし$\boxed{\text{セ}}<\boxed{\text{タ}}$となるように表しなさい．

(1) 上図より

$F_3(1)=6$，$F_3(2)=3$

$F_3(3)=1$

(2) 上からm段目に△はmコあるので

$$F_k(1)=\sum_{m=1}^{k}m=\underline{\frac{k(k+1)}{2}}\ //$$

(3) $F_k(n+1)=F_k(n)-(k-n+1)$

$$\therefore F_k(n)=F_k(1)+\sum_{m=1}^{n-1}(m-k-1)=\underline{\frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2}}\ //$$

(4)
$$\sum_{n=1}^{k}\frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left\{(k+1)(k+2)-(2k+3)n+n^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\cdot k-\frac{1}{2}(2k+3)\frac{k}{2}(k+1)+\frac{1}{12}k(k+1)(2k+1)$$

$$=\underline{\frac{k(k+1)(k+2)}{6}}\ //$$