

2014年文系第1問

1 実数  $p, q$  が  $p+q = \sqrt{6}$ ,  $p-q = \sqrt{5}$  を満たすとき,

$$p^2 + q^2 = \boxed{\text{ア}}, \frac{11}{2} pq = \boxed{\text{イ}} \frac{1}{4}$$

である。また  $p$  の整数部分を  $a$ , 小数部分を  $b$  とすると,

$$a = \boxed{\text{ウ}}, \frac{1}{b + \frac{5}{2}} = \boxed{\text{エ}} \frac{5 + \sqrt{5} - \sqrt{30}}{5}$$

である。分母は必ず有理化すること。

$$(p+q)^2 = 6$$

$$\rightarrow (p-q)^2 = 5$$

$$4pq = 1 \quad \therefore pq = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore p^2 + q^2 &= (p+q)^2 - 2pq \\ &= 6 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$(p+q) + (p-q) = \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{2} < p < \frac{2\sqrt{6}}{2} \quad \text{より} \quad a = 2, \quad b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2} - 2$$

$$\therefore \frac{1}{b + \frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} + 1)} = \frac{2 \{1 - (\sqrt{5} + \sqrt{6})\}}{\{1 + (\sqrt{5} + \sqrt{6})\} \{1 - (\sqrt{5} + \sqrt{6})\}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{b + \frac{5}{2}} &= \frac{2 \{1 - (\sqrt{5} + \sqrt{6})\}}{1 - (\sqrt{5} + \sqrt{6})^2} = \frac{2 \{1 - \sqrt{5} - \sqrt{6}\}}{-10 - 2\sqrt{30}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{6} - 1)(\sqrt{30} - 5)}{(\sqrt{30} + 5)(\sqrt{30} - 5)} \\ &= \frac{\sqrt{150} - 5\sqrt{5} + \sqrt{180} - 5\sqrt{6} - \sqrt{30} + 5}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5\sqrt{6} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{6} - \sqrt{30} + 5}{5} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{30} + 5}{5} \end{aligned}$$