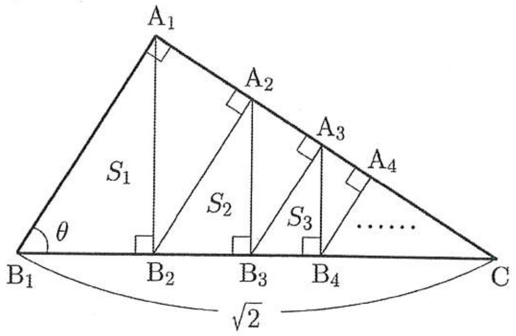
0001839450618999

# 山形大学

2014 年 工学部 第 4 問

数理 石井K

**4** $\triangle A_1B_1C$ は，$B_1C=\sqrt{2}$，$\angle B_1A_1C=\frac{\pi}{2}$，$\angle A_1B_1C=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ を満たす．下図のように，点 $A_1$ から辺 $B_1C$ に下ろした垂線を $A_1B_2$ とし，点 $B_2$ から辺 $A_1C$ に下ろした垂線を $B_2A_2$ とする．次に，点 $A_2$ から辺 $B_1C$ に下ろした垂線を $A_2B_3$ とし，点 $B_3$ から辺 $A_1C$ に下ろした垂線を $B_3A_3$ とする．この操作を繰り返し，辺 $A_1C$ 上に点 $A_2$，$A_3$，$A_4$，$\cdots$ を，辺 $B_1C$ 上に点 $B_2$，$B_3$，$B_4$，$\cdots$ を定める．自然数 $n$ に対し，$\triangle A_nB_nB_{n+1}$ の面積を $S_n$ とし，これらの面積の総和を $T=\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ とする．このとき，次の問いに答えよ．




(別解)
普通に微分して
解いてもよい

(1) $S_1=\sin\theta\cos^3\theta$，$S_2=\sin^5\theta\cos^3\theta$ を示し，一般項 $S_n$ を求めよ．

(2) $T=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}$ を示せ．

(3) $\theta$ が $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$T$ の最大値を求めよ．

(1) $A_1B_1=\sqrt{2}\cos\theta$　また，$\triangle A_1B_1C \backsim \triangle B_2B_1A_1$　$\therefore A_1B_1:B_1C=B_2B_1:B_1A_1$

$\therefore B_1B_2=\sqrt{2}\cos^2\theta$　$\therefore S_1=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos^2\theta\cdot\sin\theta=\sin\theta\cos^3\theta$ ▨

$\triangle A_1B_1C \backsim \triangle A_2B_2C$ より．$A_1B_1:A_2B_2=\sqrt{2}:\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos^2\theta=1:\sin^2\theta$

よって $\triangle A_1B_1B_2 \backsim \triangle A_2B_2B_3$ で 面積比は $1^2:(\sin^2\theta)^2$ より．

$S_2=S_1\times\sin^4\theta=\sin^5\theta\cos^3\theta$ ▨

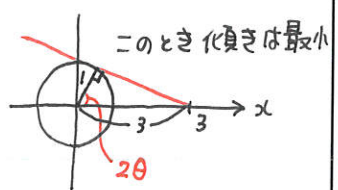
同様なことをくり返すと．$S_n=\sin\theta\cos^3\theta\cdot(\sin^4\theta)^{n-1}=\underline{\sin^{4n-3}\theta\cos^3\theta}$ //

(2) (1) より数列 $\{S_n\}$ は初項 $\sin\theta\cos^3\theta$，公比 $\sin^4\theta$ の等比数列なので

$$T=\frac{\sin\theta\cos^3\theta}{1-\sin^4\theta}=\frac{\sin\theta\cos^3\theta}{(1-\sin^2\theta)(1+\sin^2\theta)}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}$$ ▨

(3) $T=\dfrac{\frac{1}{2}\sin2\theta}{1+\frac{1-\cos2\theta}{2}}=\boxed{\dfrac{0-\sin2\theta}{3-\cos2\theta}}\times(-1)$ → 点 $(3,0)$ と $(\cos2\theta,\sin2\theta)$ を結ぶ直線の傾きなので

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より．




$\therefore T$：最大 $\iff \cos2\theta=\frac{1}{3}$，$\sin2\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ $\underline{T\text{の最大値は．}\frac{\sqrt{2}}{4}}$ //