0001827092718999

和歌山県立医科大学

2014 年 医学部 第 1 問　(2)の最後の計算はとてつもなくめんどくさい　数理石井K

$\boxed{1}$ $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 4$, $g(x) = -1 - 3\sqrt{|x-1|}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．ただし，変曲点に留意しなくてよい．

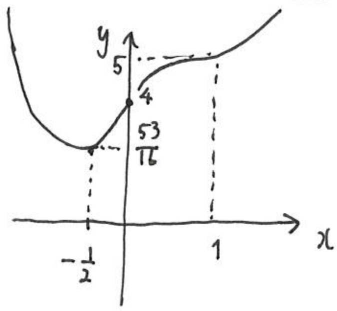
(2) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$，および 2 つの直線 $x = -1$ と $x = 2$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(1) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$

$= 2(2x^3 - 3x^2 + 1)$

$= 2(x-1)^2(2x+1)$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{53}{16}$	$\nearrow$	5	$\nearrow$



(2) $g(x)$ は常に -1 以下なので

$-1 \leqq x \leqq 2$ で $f(x) > g(x)$

また，$f(x) = -g(x)$ となるのは，$x \geqq 1$ において

$g(x)$：単調減少 ~~なので~~，$x < 1$ では $g(x)$：単調増加なので，$x = 0$ のときのみ．

したがって，$0 \leqq x \leqq 2$ では，$|f(x)| \geqq |g(x)|$，$-1 \leqq x \leqq 0$ では $|f(x)| \leqq |g(x)|$

$$\therefore V = \pi\int_{-1}^{0} |g(x)|^2 dx + \pi\int_0^2 |f(x)|^2 dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{0} 1 + 9|x-1| + 6\sqrt{|x-1|}\, dx + \pi\int_0^2 (x^4 - 2x^3 + 2x + 4)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{0} 10 - 9x + 6\sqrt{1-x}\, dx + \pi\int_0^2 x^8 + 4x^6 + 4x^2 + 16 - 4x^7 + 4x^5 + 8x^4 - 8x^4 - 16x^3 + 16x\, dx$$

$$= \pi\left[10x - \frac{9}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + 6\pi\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} + \pi\left[\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{4}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^6 - 4x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 16x\right]_0^2$$

$$= \left(10 + \frac{9}{2}\right)\pi + \left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)\cdot 6\pi + \pi\left(\frac{512}{9} - 128 + \frac{512}{7} + \frac{128}{3} - 64 + \frac{32}{3} + 32 + 32\right)$$

$$= \left(\frac{8299}{126} + 8\sqrt{2}\right)\pi$$