和歌山大学

2015年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 放物線 $C : y = \frac{1}{4}x^2$ と点 P(0, −4) がある．直線 ℓ，m，n と点 Q を以下のように定める．

直線 ℓ は，P から C に引いた接線のうち，傾きが正のものとし，その接点を Q とする．
直線 m は，Q を通り，ℓ に垂直なものとする．
直線 n は，m と C の Q 以外の交点を通り，y 軸に平行なものとする．

次の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式と点 Q の座標を求めよ．
(2) 直線 m の方程式を求めよ．
(3) 放物線 C と x 軸および直線 n で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $C : y = \frac{1}{4}x^2$ より．$y' = \frac{1}{2}x$

よって，$Q(t, \frac{1}{4}t^2)$ とおくと，

$\ell : y = \frac{1}{2}t(x-t) + \frac{1}{4}t^2$ と表せる．

これが $P(0, -4)$ を通ることより，$-4 = -\frac{1}{4}t^2$

$\therefore t = \pm 4$

ℓ の傾きが正より $t > 0$　$\therefore t = 4$

以上より，$\underline{\ell : y = 2x - 4,\ Q(4, 4)}$ //

(2) m は $Q(4, 4)$ を通り，$\ell : y = 2x - 4$ に垂直なので

$m : y = -\frac{1}{2}(x-4) + 4$　　$\therefore \underline{m : y = -\frac{1}{2}x + 6}$ //

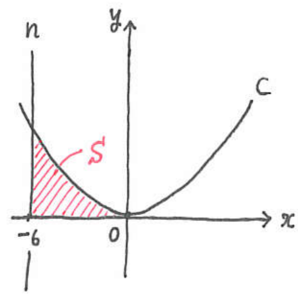
(3) m と C の交点を求めると，

$\frac{1}{4}x^2 - (-\frac{1}{2}x + 6) = 0$

$\therefore (x-4)(x+6) = 0$　$\therefore x = -6, 4$

$\therefore$ 交点は $(4, 4), (-6, 9)$

$\therefore n : x = -6$



$\therefore S = \int_{-6}^{0} \frac{1}{4}x^2 dx$

$= \left[\frac{x^3}{12} \right]_{-6}^{0}$

$= \underline{18}$ //