

2014年基礎工第4問

4 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \cos(2\pi x) dx, \quad b_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \sin(2\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める. ただし, e は自然対数の底を表す.(1) a_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより,

$$a_n = -\frac{\pi}{\text{ア}} b_n$$

がわかる.

一方, b_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより,

$$b_n = \frac{\pi}{\text{イ}} a_n - \frac{e^{\text{ウ}} + \text{エ}}{\text{オ}} e^{\text{カ}} n + \text{キ}$$

がわかる.

これらの関係式より, a_n は

$$a_n = \frac{\pi(e^{\text{ク}} + \text{ケ})}{\text{コ}(\pi \text{サ} + \text{シ})e^{\text{ス}} n + \text{セ}}$$

となることわかる.

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は $\frac{\pi}{\text{ソ}(\pi \text{タ} + \text{チ})(e^{\text{ツ}} - e)}$ となる.